1. Temperaturę powierzchni planety określa ilość energii dostarczanej przez oświetlające ją gwiazdy. Znana jest moc promieniowania Proximy: $L_P = 0{,}00\,155\ L_\odot$, natomiast wśród danych brakuje informacji o mocy promieniowania składników α Cen. W celu ich oszacowania można przyjąć, że łączna jasność pary A i B jest równa $2 \cdot L_\odot$, można też skorzystać z przybliżonej zależności Eddingtona *masa-jasność,* która dla gwiazd ciągu głównego podobnych do Słońca wyraża się jako: $L \sim M^{3,5}$, gdzie M jest masą gwiazdy. Wiedząc, że natężenie oświetlenia maleje z kwadratem odległości, stosunek mocy promieniowania wynosi:

$$\frac{L_P}{L_{A+B}} = \frac{0{,}00155}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_P}{S_{A+B}} = \frac{0{,}00155}{2} \cdot \frac{13000^2}{0{,}05^2} = 7{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}76 \cdot 10^{10} = 5{,}17 \cdot 10^7.$$

Przyjęte oszacowanie mocy promieniowania składników A i B, jest w zupełności wystarczające. Obecnie strumień energii S_0 padającej na planetę jest zdominowany przez Proximę, czyli:

$$S_0 \sim \frac{L_P}{r^2}.$$

Gdy składnik A stanie się olbrzymem o jasności $L_G = 25\,000\ L_\odot$, a Proxima znajdzie się w odległości $r_{min} = 4\,300$ au od α Cen, planeta będzie oświetlana strumieniem:

$$S_1 \sim \frac{L_P}{r^2} + \frac{L_G}{r_{min}^2}.$$

Stosunek oświetleń: $$\frac{S_1}{S_0} = 1 + \frac{L_G}{L_P}\frac{r^2}{r_{min}^2} \approx 1 + 2{,}18 \cdot 10^{-3}.$$

Wynik ten wskazuje, że efekt odległości nadal będzie dominował nad efektem mocy promieniowania, a to oznacza, że oświetlenie planety pochodzące od składników α Cen, nadal będzie pomijalne.

Jeśli założymy brak innych, niż oświetlenie, źródeł energii planety (np. energii wyzwalanej na skutek pływów, czy płynącej z jej wnętrza na skutek aktywności promieniotwórczej), a także założymy brak efektu cieplarnianego oraz ruch obrotowy planety i stałość jej albedo, to z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że stosunek temperatur powierzchni planety będzie wynosił:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{1/4} \approx 1 + 5{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

Zależność ta pozwala oszacować spodziewaną zmianę temperatury powierzchniowej planety: $\Delta T = T_1 - T_0 \approx T_0 \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-4} = \underline{0{,}12\ \mathrm{K}}$. Zatem wzrost temperatury tylko nieznacznie przekroczy 0,1 stopnia.

W rozwiązaniu założyliśmy dodatkowo stabilność orbity Proximy wokół α Cen oraz orbity planety wokół Proximy, co w skali miliardów lat nie musi być spełnione, natomiast gwiazdy o niewielkich masach, będą przebywały na ciągu głównym dziesiątki miliardów lat i dlatego założenie o stałej mocy promieniowania Proximy zapewne będzie spełnione.

2. Z III prawa Keplera – duża półoś orbity Marsa:

$$(a_{\mathrm{M}})^3 = (T_{\mathrm{M}})^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{M}} = 1{,}523 \text{ au.}$$

Duża półoś orbity statku kosmicznego:

$$a_{\mathrm{S}} = (a_{\mathrm{M}} + a_{\mathrm{Z}})\,/\,2 = 1{,}262 \text{ au.}$$

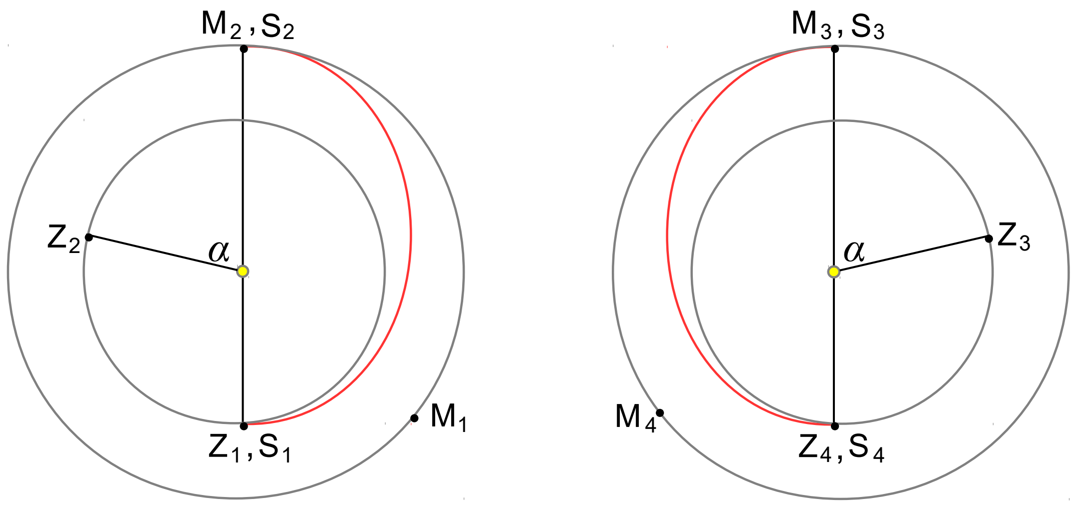
Okres orbitalny statku kosmicznego:

$$(T_{\mathrm{S}})^2 = (a_{\mathrm{S}})^3 \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{S}} = 1{,}417 \text{ lat} = 518 \text{ dni.}$$

Po uwzględnieniu przyjętych założeń, czas trwania lotu „tam” będzie równy czasowi „powrotu” na Ziemię:

$$\Delta t_{\text{tam}} = \Delta t_{\text{powrotu}} = T_{\mathrm{S}}\,/\,2 = 0{,}709 \text{ roku} = 259 \text{ dni.}$$

Należy zauważyć, że start powrotny nie może nastąpić w dowolnym momencie, lecz tylko w takim, by po czasie $T_{\mathrm{S}}\,/\,2$ Ziemia znalazła się w peryhelium elipsy.



Na rysunkach zaznaczono położenia: Ziemi (Z), statku kosmicznego (S) i Marsa (M). Indeksami od 1 do 4 oznaczono cztery momenty dotyczące wyprawy: 1 – moment startu, 2 – dotarcie wyprawy do Marsa (początek pobytu na planecie), 3 – początek powrotu na Ziemię (koniec pobytu na planecie), 4 – powrót na Ziemię.

Podczas lotu „tam”, Mars zakreśli na swojej orbicie kąt: $\Delta t_{\text{tam}} \cdot 360^{\circ}/T_{\mathrm{M}} = 136^{\circ}$, a Ziemia: $\Delta t_{\text{tam}} \cdot 360^{\circ}/T_{\mathrm{Z}} = 255^{\circ} = 180^{\circ} + \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75^{\circ}$.

Analogiczne kąty (o takich samych wartościach) występują w przypadku „powrotu”.

Podczas pobytu wyprawy na planecie, Ziemia przesunie się po swojej orbicie z położenia Z_2 do Z_3, czyli o kąt: $360^{\circ} - 2\cdot\alpha = 210^{\circ}$. Jest to oczywiście kąt przesunięcia Ziemi względem Marsa. Czas potrzebny na wykonanie tego przesunięcia (czyli czas pobytu na planecie) należy obliczać z okresu synodycznego Marsa (lub za pomocą różnicy prędkości kątowych Ziemi i Marsa). Okres synodyczny wyznaczymy z zależności:

$$\frac{1}{T_{syn.}} = \frac{1}{T_Z} - \frac{1}{T_M} \qquad \Rightarrow \qquad T_{\text{syn}} = 2{,}135 \text{ lat} = 780 \text{ dni}$$

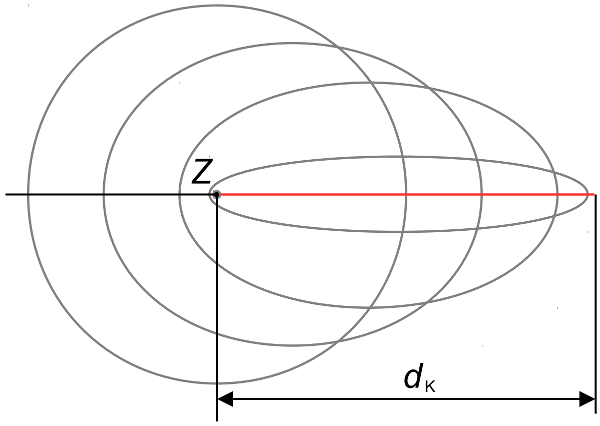
i czas pobytu na powierzchni planety: $\Delta t_{\text{pobytu}} = 1{,}246$ lat $= 455$ dni.

Ostatecznie, czas trwania takiej wyprawy, to: <u>2,66 lat</u> = 973 dni.

3. Ruch masy *m*, w centralnym polu grawitacyjnym wytwarzanym przez masę *M,* opisują uogólnione prawa Keplera. Z III prawa wynika, że okres obiegu masy centralnej zależy od sumy mas oraz od dużej półosi orbity, natomiast nie zależy od wartości mimośrodu orbity:

$$a^3 = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} T^2 .$$

Rysunek przedstawia rodzinę orbit eliptycznych wokół Ziemi. Okresy obiegu są dla nich identyczne, bo takie same są ich duże półosie: $a = d_K / 2$, różnią się natomiast wartościami mimośrodu: $e \in (0;1)$.



Jeśli wartość mimośrodu dąży do zera, to kształt elipsy zbliża się do okręgu o promieniu *a.* W przypadku, gdy mimośród dąży do jedynki, to mała półoś elipsy dąży do zera. Do zera będzie też dążyła odległość perygeum, natomiast odległość apogeum będzie dążyła do promienia orbity Księżyca: $d_K = 3{,}844 \cdot 10^8$ m. Spadek swobodny będzie więc odbywał się po takiej „zdegenerowanej" elipsie, a czas spadku będzie równy połowie okresu obiegu.

W celu wyznaczenia okresu obiegu *T*, należy skorzystać z zależności wynikającej z III uogólnionego prawa Keplera, gdzie masę *m* można pominąć względem masy Ziemi (M_Z):

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{G(M_Z + m)}} = \pi d_K \sqrt{\frac{d_K}{2GM_Z}} = 9{,}704 \text{ dnia.}$$

Skorzystanie w tym miejscu z miesiąca syderycznego wprowadza niedokładność, bo masa Księżyca nie jest pomijalnie mała względem masy Ziemi ($M_Z / M_K = 81{,}3$).

Czas spadku, czyli połowa obliczonego okresu: T/2 = 4,852 dnia = 116,5 godziny.

W rozwiązaniu przyjęliśmy, że Ziemie jest punktem materialnym. Spadek na jej powierzchnię nastąpi oczywiście nieco wcześniej. Można próbować oszacować ten czas (choć nie było to wymagane w zadaniu). W chwili zderzenia z Ziemią, prędkość spadku powinna być troszkę mniejsza od II prędkości kosmicznej dla powierzchni Ziemi (i jeszcze się powoli zwiększała). Do przebycia pozostawała więc droga równa promieniowi Ziemi, co powinno zająć około 10 minut.

Oczekiwana w zadaniu odpowiedź, to <u>4,852 dnia</u>.

4. W treści zadania podany jest algorytm działający w kierunku przeciwnym do potrzebnego (tzn. od daty do *JD)*, a wygodniejszy byłby odwrotny. Należy więc opracować własny sposób postępowania, w celu wyznaczenia szukanej daty urodzin Jana Heweliusza:

Obliczmy JD_Z dla daty zawodów:

$Y = 2017,\ M = 1,\ D = 23,$
$A = 0 + 2\,017 + 4\,716 = 6\,733$
$B = 30 - 11\,782 + 740\,239 + 23 + 1\,729\,317{,}5 = 2\,457\,827{,}5$
$C = 68$
$JD_Z = 2\,457\,827{,}5 - 51 = 2\,457\,776{,}5$.

Od dnia urodzin Heweliusza do daty zawodów upłynęło: $JD_Z - JD_H = 148\,284$ dni, co daje prawie 406 lat, a to oznacza, że Jan Heweliusz urodził się na początku 1611 r. Według tego samego algorytmu można obliczyć JD_0, tzn. dzień juliański dla daty 1 stycznia 1611 r:

$Y = 1611,\ M = 1,\ D = 1,$
$A = 0 + 1611 + 4716 = 6327,$
$B = 30 - 11\,072 + 59\,1237 + 1 + 1\,729\,317{,}5 = 2\,309\,513{,}5$,
$C = 64$
$JD_0 = 2\,309\,513{,}5 - 48 = 2\,309\,465{,}5.$

Różnica między otrzymanym wynikiem, a tym podanym w treści wynosi 27 dni, stąd wynika wniosek, że Heweliusz urodził się 27 dni po 01 stycznia, czyli: <u>28 stycznia 1611 r</u>.

Powinniśmy jeszcze określić dzień tygodnia. Od dnia urodzin Heweliusza do daty zawodów upłynęło 148 284 dni. Po podzieleniu tej liczby dni przez 7 otrzymamy 21 183 tygodni oraz resztę 3, czyli był to <u>piątek</u> (bo gdyby Heweliusz urodzł się o 3 dni później, to byłby to poniedziałek i wtedy reszta wynosiłaby zero).