LXVII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA

Przykładowe, rozwiązania zadań z I etapu

Zadanie 1

Uwaga: możliwe jest kilka dobrych odpowiedzi w każdym z pytań.
Pytanie zostanie zaliczone jeśli zostaną wskazane wszystkie i tylko dobre odpowiedzi.

1.1) Zaznacz lata przestępne w kalendarzu gregoriańskim:
a) 1746
b) 1900
c) 2400
d) 3200

1.2) Zdrożony wędrowiec w pierwszy dzień wiosny wbił pionowo kij w płaski spłachetek piasku i stwierdził, że długość cienia w momencie południa prawdziwego była pięć razy mniejsza niż wysokość kija nad piaskiem. Oblicz, na jakiej szerokości geograficznej mógł znajdować się wędrowiec.
a) 11° N
b) 11° S
c) 79° N
d) 79° S

1.3) Jaki wynik może osiągnąć skoczek wzwyż na Księżycu, jeśli na Ziemi osiąga wynik zbliżony do jego wzrostu, czyli około 2 metry.
a) 2 m
b) 4 m
c) 7 m
d) 12 m

1.4) O której godzinie w przybliżeniu górować będą księżyce pyłowe, ulokowane w punktach Lagrange'a L4 i L5 układu Ziemia-Księżyc, jeśli Księżyc jest w pierwszej kwadrze?
a) 14
b) 18
c) 22
d) 02

1.5) Ziemska atmosfera przepuszcza promieniowanie elektromagnetyczne o:

a) długości fali 500 nm;
b) częstotliwości fali 10 GHz;
c) energii 8 keV;

d) długości fali 500 Å.

1.6) Pewna gwiazda znajduje się w odległości 100 pc od Słońca i jest położona na ekliptyce. Wskutek zjawiska paralaksy heliocentrycznej, w ciągu roku, jej

a) długość ekliptyczna zmienia się w przedziale o szerokości 0,01″;
b) długość ekliptyczna zmienia się w przedziale o szerokości 0,02″;
c) szerokość ekliptyczna zmienia się w przedziale o szerokości 0,01″;
d) szerokość ekliptyczna zmienia się w przedziale o szerokości 0,02″.

1.7) Maksimum mocy promieniowania w widmie pewnej gwiazdy przypada na długości fali dwukrotnie krótszej niż maksimum mocy promieniowania w widmie Słońca. Oznacza to, że w przybliżeniu moc promieniowania tej gwiazdy jest:

a) dwukrotnie większa niż moc promieniowania Słońca;
b) dwukrotnie mniejsza niż moc promieniowania Słońca;
c) cztery razy większa niż moc promieniowania Słońca;
d) szesnaście razy większa niż moc promieniowania Słońca.

1.8) Transport energii w gwieździe ciągu głównego o masie 3 masy Słońca zachodzi za pośrednictwem:

a) wyłącznie konwekcji;
b) wyłącznie promieniowania;
c) konwekcji w jądrze gwiazdy i promieniowania w jej zewnętrznych warstwach;
d) promieniowania w jądrze gwiazdy i konwekcji w jej zewnętrznych warstwach.

1.9) Dwie gwiazdy, A i B, znajdują się w tej samej gromadzie gwiazd i mają taki sam wskaźnik barwy. Gwiazda A jest jaśniejsza o 2,5 mag w porównaniu do gwiazdy B. Oznacza to, że

a) promień gwiazdy A jest 10 razy większy od promienia gwiazdy B;
b) promień gwiazdy A jest 3,2 razy większy od promienia gwiazdy B;
c) promień gwiazdy A jest 3,2 razy mniejszy od promienia gwiazdy B;
d) promień gwiazdy A jest 10 razy mniejszy od promienia gwiazdy B.

1.10) Rozważmy dwie identyczne galaktyki, A i B, których przesunięcia ku czerwieni są większe niż jeden ($z > 1$). Średnica kątowa galaktyki A jest dwukrotnie większa niż średnica kątowa galaktyki B. Oznacza to, że galaktyka A jest jaśniejsza od galaktyki B o czynnik

a) większy niż 4;
b) dokładnie 4;
c) mniejszy niż 4;
d) w treści pytania nie ma wystarczająco dużo danych, żeby to obliczyć.

Zadanie 2

Załóżmy, że zamiast Sedny po jej orbicie porusza się gwiazda o jasności absolutnej 15 mag. Oblicz w jakim przedziale zmieniłaby się jej obserwowana wielkość gwiazdowa dla ziemskiego obserwatora. Czy gwiazda mogłaby być jaśniejsza niż Księżyc w pełni? Dane potrzebne do rozwiązania wyszukaj samodzielnie.

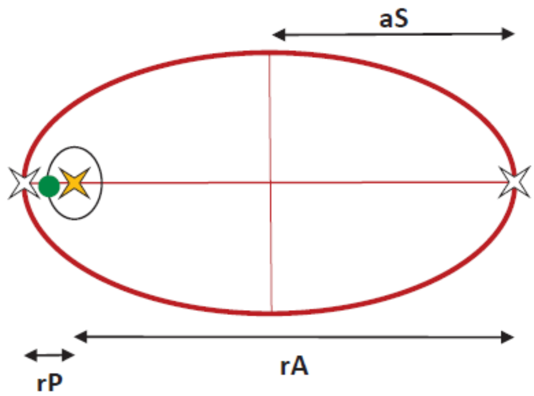
Rozwiązanie

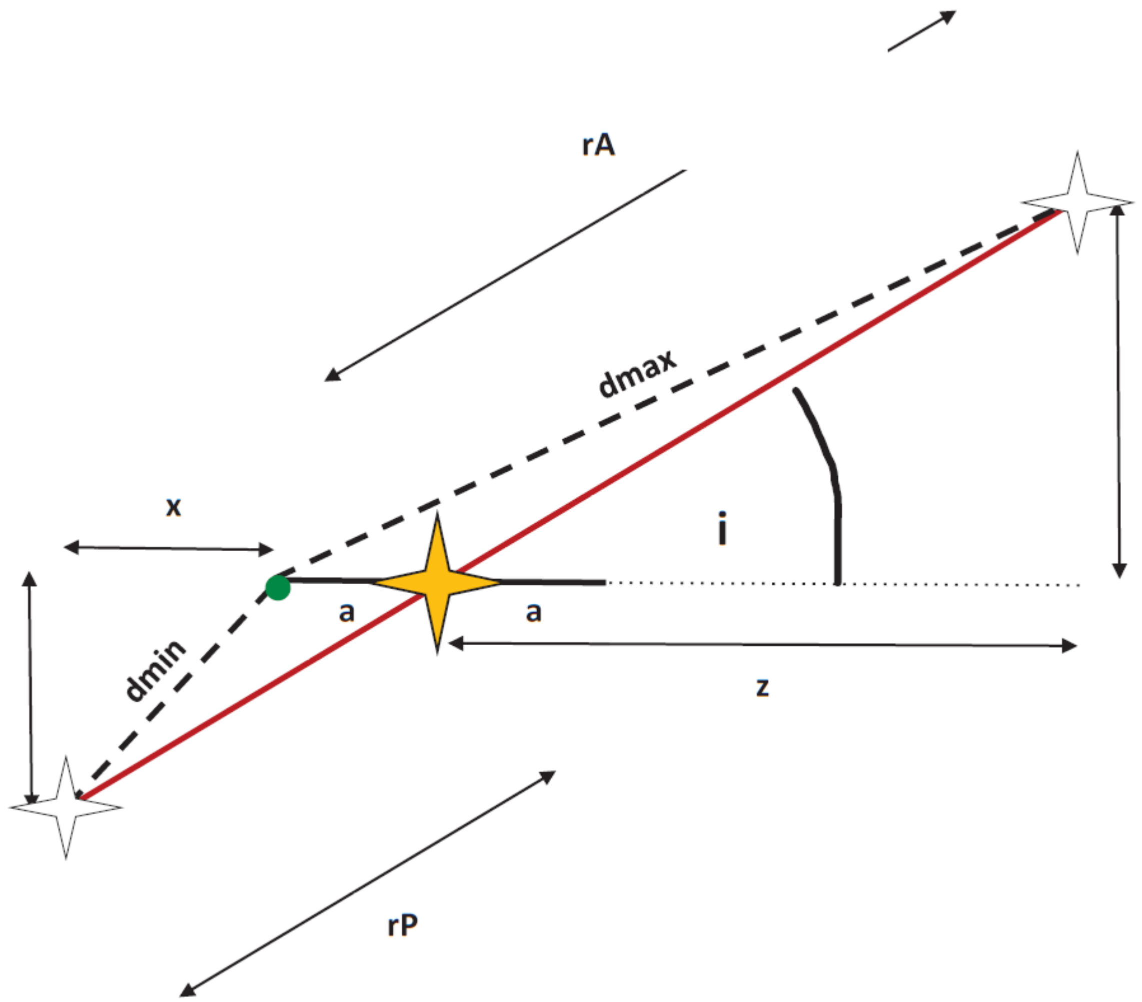
Wartości parametrów orbity Sedny minimalnie różnią się w zależności od źródła informacji. My do obliczeń użyjemy wartości podanych przez artykuł polskiej Wikipedii Wolnej Encyklopedii o tejże planetoidzie.

(link do strony: https://pl.wikipedia.org/wiki/(90377)_Sedna)

W poniższym rozwiązaniu zakładamy, że parametry orbitalne układu złożonego ze Słońca, Ziemi oraz gwiazdy o wizualnej jasności absolutnej 15 mag – gwiazdy S (od Sedny) - poruszającej się po orbicie Sedny będą w dobrym przybliżeniu nie inne niż dla układu złożonego ze Słońca, Ziemi oraz Sedny. Bowiem opis gwiazdy jak w treści zadania odpowiadałby prawdopodobnie białemu karłowi, który to mógłby mieć masę tak znaczącą w porównaniu do Słońca jak 0,5 masy Słońca - grawitacyjnie podważając dominujący status gwiazdy centralnej. Dlatego używana poniżej wielkość jaką jest wielka półoś orbity gwiazdy S, oznaczanej a_S, jest w rzeczywistości wielką półosią orbity względnej układu Słońce - gwiazda S. Dla jasności, *orbita względna Słońca - gwiazdy S* będzie poniżej nazywana *orbitą gwiazdy S.*

Oto dwa rysunki poglądowe przedstawiające uproszczoną sytuację (nie będące w skali) oraz definiujące używane poniżej oznaczenia. Pierwszy od góry przedstawia wygląd orbit Ziemi i gwiazdy S, gdzie kierunek patrzenia jest prostopadły do płaszczyzny orbity gwiazdy S. Gwiazdę S, w dwóch wybranych położeniach, przedstawiono za pomocą białej gwiazdy, a Słońce - pomarańczowej. Ciemnozielone koło ma reprezentować kulę ziemską. Drugi rysunek przedstawia sytuację z “bocznej” perspektywy (patrz: następna strona). Na jego podstawie będą prowadzone obliczenia.





Dodatkowo, pozwólmy sobie wytłumaczyć wszystkie oznaczenia i wielkości słownie:

a – promień orbity Ziemi (zakładamy, że orbita jest kołowa - o tym więcej później),

a_S – wielka półoś orbity względnej Słońce - gwiazda S (wielka półoś orbity gwiazdy S),

e - mimośród orbity gwiazdy S,

i – nachylenie/inklinacja orbity gwiazdy S względem orbity Ziemi,

r_P - odległość gwiazdy S od Słońca w peryhelium,

r_A - odległość gwiazdy S od Słońca w aphelium,

d_{min} – minimalna odległość Ziemia – gwiazda S,

d_{max} - maksymalna odległość Ziemia – gwiazda S,

x, y, z, v – zdefiniowane na rysunku.

I.. Znając jasność absolutną gwiazdy S poznamy jej jasność widomą z perspektywy z Ziemi w danych momentach (środka Ziemi, dokładnie rzecz biorąc), jeżeli poznamy dystanse jaki dzielą te obiekty w tych momentach (w naszym przypadku są to d_{min} oraz d_{max}):

1.1: r_P

$$r_P = a_S - a_S \times e \ = a_S(1-e)$$

1.2: r_A

$$r_A = a_S + a_S \times e \ = a_S(1+e)$$

2.1: d_{min}

Z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\sin i = \frac{y}{r_P}$$

$$\cos i = \frac{x+a}{r_P}$$

$$y = r_P \times \sin i$$

$$x = r_P \times \cos i - a$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(d_{min})^2 = x^2 + y^2$$

Przekształcając i podstawiając:

$$d_{min} = \sqrt{(r_P \times \cos i - a)^2 + (r_P \times \sin i)^2}$$

Ostatecznie z 1.1:

$$d_{min} = \sqrt{(a_S(1-e) \times \cos i - a)^2 + (a_S(1-e) \times \sin i)^2}$$

2.2: d_{max}

Z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\sin i = \frac{v}{r_A}$$

$$\cos i = \frac{z}{r_A}$$

$$v = r_A \times \sin i$$

$$z = r_A \times \cos i$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(d_{max})^2 = v^2 + (z+a)^2$$

Przekształcając i podstawiając:

$$d_{max} = \sqrt{(r_A \times \sin i)^2 + (r_A \times \cos i + a)^2}$$

Ostatecznie z 1.2:

$$d_{max} = \sqrt{(a_S(1+e) \times \sin i)^2 + (a_S(1+e) \times \cos i + a)^2}$$

II.. Prawo Pogsona, gdzie m - jasność widoma, M - jasność absolutna, d – dystans pomiędzy obiektami:

$$m = M + 5\log \frac{d}{10\,pc}$$

Wiedząc, że $1\,pc \approx 206\,265\,au$, wzór ogólny powyżej przyjmuje wygodną dla nas postać, jako że odległości będziemy wyrażać w jednostkach astronomicznych:

$$m = M + 5\log \frac{d}{2\,062\,650\,au}$$

Niech:

m_{dmin} to jasność widoma gwiazdy S, gdy jest ona możliwe jak najbliżej Ziemi,

m_{dmax} to jasność widoma gwiazdy S, gdy jest ona możliwe jak najdalej od Ziemi,

czyli $m_{dmin} > m_{dmax}$

3.1: $m_{dmin} = M + 5\log \frac{d_{min}}{2\,062\,650\,au}$

3.2: $m_{dmax} = M + 5\log \frac{d_{max}}{2\,062\,650\,au}$

Z 2.1 i 3.1:

4.1: $m_{dmin} = M + 5\log \frac{\sqrt{(a_S(1-e)\times\cos i - a)^2 + (a_S(1-e)\times\sin i)^2}}{2\,062\,650\,au}$

Z 2.2 i 3.2:

4.2: $m_{dmax} = M + 5\log \frac{\sqrt{(a_S(1+e)\times\sin i)^2 + (a_S(1+e)\times\cos i + a)^2}}{2\,062\,650\,au}$

III.. Teraz możemy podstawiać wartości. Oto one:

$$a_S = 541{,}6 \pm 0{,}2\,au$$

$$e = 0{,}8590$$

$$i = 11{,}93°$$

$$a = 1\,au$$

$$M = 15^m$$

Tak jak wcześniej wspomniano, zakładamy tutaj, że orbita Ziemi jest kołowa. Możemy tak zrobić, ponieważ odległość Ziemi od Słońca waha się w stosunkowo niewielkim zakresie od około $0{,}983\,au$ do około $1{,}017\,au$. Tym bardziej, że niepewność z jaką znane jest a_S to "aż" $\pm 0{,}2\,au$ oraz a_S jest znacznie większe od a. $0{,}2\,au$ dzielone przez $541{,}6\,au$ to w przybliżeniu jedynie

0,00037 , co czyni niepewność również pomijalną. Także przyjmujemy, że orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu a oraz, że a_S równe jest dokładnie $541{,}6\ au$.

$$m_{dmin} = 15^m + 5\log \frac{\sqrt{(541{,}6\ au \times (1-0{,}8590) \times \cos 11{,}93° - 1\ au)^2 + (541{,}6\ au \times (1-0{,}8590) \times \sin 11{,}93°)^2}}{2\ 062\ 650\ au}$$

$$m_{dmax} = 15^m + 5\log \frac{\sqrt{(541{,}6\ au \times (1+0{,}8590) \times \sin 11{,}93°)^2 + (541{,}6\ au \times (1+0{,}8590) \times \cos 11{,}93° + 1\ au)^2}}{2\ 062\ 650\ au}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$m_{dmin} \approx -7{,}19^m$$

$$m_{dmax} \approx -1{,}56^m$$

Tak na marginesie - wyniki obliczeń przeprowadzonych z założeniem, że obserwator znajduje się w środku Słońca, a nie Ziemi, prawdopodobnie nie różniłyby się znacząco od otrzymanych tutaj przez nas.

IV.. Dyskusja i odpowiedź:

Z perspektywy ziemskiego obserwatora, wizualna jasność widoma gwiazdy o wizualnej wielkości absolutnej 15 mag poruszającej się po orbicie Sedny zmieniałaby się w przybliżeniu w zakresie od –7,19 mag (najjaśniejsza) do –1,56 mag (najsłabsza). Jednak nigdy nie byłaby jaśniejsza niż Księżyc w pełni, który to w tej fazie ma około –12,7 mag wizualnej jasności widomej. Co więcej, niezależnie od odległości od Ziemi w danej chwili, byłaby wizualnie najjaśniejszą gwiazdą na ziemskim niebie po Słońcu - najjaśniejsza obecnie gwiazda nocnego nieba – Syriusz, jest wizualnie odrobinę słabsza niż -1,5 mag.

Do bólu stosujemy tutaj słowo "wizualnie", bowiem w zależności od prawdziwej natury obiektu jakim mogłaby być gwiazda S (białym karłem?), możliwe, że np. w ultrafioletowym zakresie promieniowania elektromagnetycznego byłaby jednak czasami jaśniejsza niż Księżyc w pełni.

Zad. 3

DANE:

ŚREDNICA (d) = 2,4 m (Hubble)

ORBITA KOŁOWA O R = 525 km

ZAKRES WIDMA OBSERWACJI: 90–2500 nm

ROZWAŻMY TRZY PRZYPADKI:

1) obserwacja w 90 nm (UV)   2) 550 nm (Vis)   3) 2500 nm (NEAR IR)

1) $R = 1{,}22 \dfrac{9 \cdot 10^{-8}\,m}{2{,}4\,m} = 4{,}575 \cdot 10^{-8}\,rad$ (kryterium Rayleigha)

$\theta = \dfrac{d}{D}$ $4{,}575 \cdot 10^{-8}\,rad \cdot 525\,000\,m = 0{,}024\,m = 2{,}4\,cm$

2) $R = 1{,}22 \dfrac{5{,}5 \cdot 10^{-7}}{2{,}4} = 2{,}796 \cdot 10^{-7}\,rad$

$2{,}796 \cdot 10^{-7}\,rad \cdot 525\,000\,m = 0{,}147\,m = 14{,}7\,cm$

3) $R = 1{,}22 \dfrac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{2{,}4} = 1{,}27 \cdot 10^{-6}\,rad$

$1{,}27 \cdot 10^{-6}\,rad \cdot 525\,000\,m = 0{,}667\,m = 66{,}7\,cm$

SZUKANIE WARTOŚCI GRANICZNEJ:

$x \cdot 525\,000 \leq 0{,}1$

$x \leq 1{,}905 \cdot 10^{-7}\,rad$

$1{,}22 \cdot \dfrac{y}{2{,}4} \leq 1{,}905 \cdot 10^{-7}\,rad$

$y \leq 3{,}75 \cdot 10^{-7}\,m = \underline{375\,nm}$

Odp.

Teleskop Hubblea będzie miał lepszą dokładność w obserwacjach w falach krótszych od 375 nm (UV). W świetle widzialnym ma mniejszą rozdzielczość.

Rozwiązanie zadania 4.

Z treści:
całkowita masa stacji $M_S = 18500kg$
prędkość początkowa noboju $v_0 = 690\frac{m}{s}$
masa jednego naboju $m = 0{,}2kg$
ilość naboi $n = 200$
wysokość orbity nad powierzchnią Ziemi $h = 245km$.

Inne wykorzystane stałe:
promień Ziemi $R = 6371km$
masa Ziemie $M_Z = 5{,}972 \cdot 10^{24}kg$
stała grawitacyjna $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{s^2kg}$.

Najpierw wyznaczamy prędkość stacji na orbicie v_s za pomocą wzoru na prędkość orbitalną:

$$v_S = \sqrt{\frac{GM_Z}{R+h}} \approx 7759{,}3\ \frac{m}{s}$$

Ponieważ masa naboi w stosunku do masy całej stacji jest bardzo mała, oraz ponieważ działko jest "szybkostrzelne" możemy przybliżyć, że pociski zostają wystrzelone niemal jednocześnie.
Z zasady zachowania pędu:

$$\Delta p_P = \Delta p_S$$

$$m \cdot n \cdot v_0 = (M_S - mn)\Delta v_s$$

po przekształceniu:

$$\Delta v_S = \frac{mnv_0}{M_S - mn} \approx 1{,}5\ \frac{m}{s}$$

Czyli prędkość stacji po wystrzeleniu to $v_{S1} = v_s - \Delta v_s = 7757{,}8\frac{m}{s}$ jeśli pociski będą wystrzelone w kierunku ruchu stacji, a $v_{S2} = v_s + \Delta v_s = 7760{,}8\frac{m}{s}$ jeśli w przeciwnym. Stacja wejdzie wtedy na orbitę eliptyczną, której wielką półoś możemy wyznaczyć ze wzoru vis-viva, pamiętając przy tym, że w pierwszym przypadku zaraz po wystrzale stacja znajduje się w apogeum orbity, a w drugim w perygeum.

Wzór vis-viva dla elipsy można z łatwością wyprowadzić z zachowania energii i zachowania momentu pędu na orbicie (symbolem a oznaczam apocentrum, a p perycentrum orbity),

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_a} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_p}$$

oraz

$$L = v_p r_p = r_a v_a$$

czyli,

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \frac{GMm}{r_a} - \frac{GMm}{r_p}$$

$$v_p = \frac{r_a v_a}{r_p}$$

a zatem,

$$\frac{1}{2}(\frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2})v_a^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM(\frac{r_p - r_a}{r_p r_a})\frac{r_p^2}{r_p^2 - r_a^2} = GM\frac{r_p}{r_a(r_a + r_p)}$$

jako że $r_p + r_a = 2a$,

$$\frac{1}{2}v_a^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{2a}$$

podstawiwszy to do wcześniejszego wzoru na E,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

otrzymujemy tym samym:

$$v = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}$$

co chcieliśmy udowodnić.

W naszym przypadku wzór vis-viva ma postać:

$$v = \sqrt{GM(\frac{2}{R+h} - \frac{1}{a})}$$

po przekształceniu

$$a = \frac{1}{\frac{2}{R+h} - \frac{v^2}{GM}}$$

czyli

$$a_1 = \frac{1}{\frac{2}{R+h} - \frac{v_{S1}^2}{GM}} \approx 6613{,}4\ km$$

$$a_2 = \frac{1}{\frac{2}{R+h} - \frac{v_{S2}^2}{GM}} \approx 6618{,}5\ km$$

Aby policzyć energię sumaryczną pocisków przybliżymy, że ich prędkość v_p jest równa sumie v_S i v_0 dla przypadku pierwszego, a różnicy dla drugiego.

$$E_{P1} = \frac{mn(v_S + v_0)^2}{2} \approx 1428\ MJ$$

$$E_{P2} = \frac{mn(v_S - v_0)^2}{2} \approx 1000\ MJ$$

Zmiany energii kinetycznej stacji to natomiast:

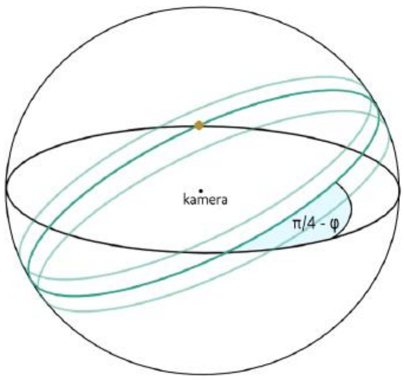
$$\Delta E_{S1} = \frac{M_S v_S^2 - (M_S - mn)v_{S1}^2}{2} \approx 1419\ MJ$$

$$\Delta E_{S2} = \frac{M_S v_S^2 - (M_S - mn)v_{S2}^2}{2} \approx 989\ MJ$$

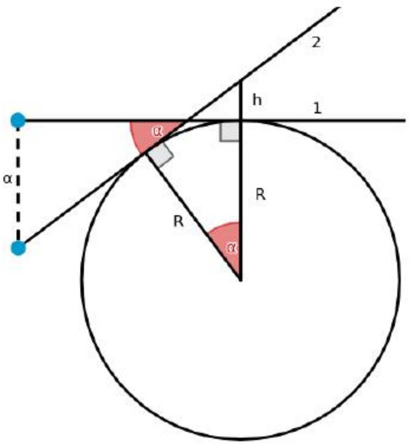
Różnica między E_P, a E_S oznacza, że do momentu strzału pociski lub stacja muszą posiadać energię w innej postaci niż kinetyczna, którą przeznaczą na wystrzał.

Zadanie 5

Pierwszą ważną obserwacją jest to, że kąt, pod którym skierowana jest codzienna droga Słońca jest zależny od szerokości geograficznej - dokładniej jest on równy $90° - \varphi$. Drugą obserwacją jest to, że nie zależy on od pory roku.



Rys.1 - na zielono są zaznaczone łuki zakreślane przez Słońce, widoczne z szerokości geograficznej φ. Żółty punkt obrazuje Słońce w czasie zachodu.



Rys.2 - Horyzont 1 jest horyzontem dla kamery leżącej na ziemi, horyzont 2 jest horyzontem dla kamery uniesionej na wysokość h. Kąt α jest kątem zakreślonym przez składową prędkości kątowej Słońca. Składowa prędkości kątowej Słońca działająca "w dół" to $\omega \cos \varphi$, zatem :

$$\omega \cos(\varphi) t = \arccos \frac{R}{R+h} \text{ z trójkąta prostokątnego,}$$

gdzie t - różnica zachodów Słońca dla horyzontów 1 i 2. Przekształcając otrzymujemy

$$t = \frac{\arccos \frac{R}{R+h} T}{\cos(\varphi) 2\pi} = \frac{\arccos \frac{6370\ 000}{6370\ 000+1} \cdot 24 \cdot 3600}{2\pi \cos(54° 50')} \approx 13,38\ s$$

Ostatecznie otrzymujemy, że nagranie można wydłużyć o $13,38\ s$.

Zadanie 6

Aby oszacować częstość, z jaką planety swobodne zbliżają do Słońca na zadaną odległość, należy poczynić parę założeń.

- Ruchem planet swobodnych w Galaktyce rządzą takie same prawa, jak w przypadku ruchu gwiazd, tj. oprócz ruchu wokół centrum posiadają jeszcze dodatkową losową składową prędkości, powodującą ich chaotyczny ruch w skalach mniejszych niż cały dysk galaktyczny;
- W całym sąsiedztwie Słońca (w którym badamy częstość pojawiania się gwiazd/planet/innych obiektów) gęstość prawdopodobieństwa ich pojawienia się jest taka sama, to znaczy, nie istnieją miejsca/rejony bardziej uprzywilejowane (takie, w których szansa na pojawienie się obiektu jest większa).

Założenia są zasadne – nie ma powodu, dla którego ruch planet swobodnych miałby się różnić od ruchu gwiazd, a w dużych skalach czasowych losowość kierunków wektorów prędkości obiektów powoduje „uśrednienie” ich pojawiania się w pobliżu Słońca.

Skoro mamy już pewne podstawy, możemy zbudować na nich model fizyczny. Bazując na drugim postulacie, można łatwo stwierdzić, że im większy rozpatrujemy obszar, tym większa musi być częstość. Nasz wszechświat dysponuje trzema wymiarami przestrzennymi, także częstość ε będzie rosła z objętością:

$$\varepsilon \sim R^3$$

Gdzie R jest odległością granicy rozpatrywanego obszaru od Słońca.

Z danych dotyczących gwiazd możemy wyciągnąć „bazowe” częstość i odległość ε_0 i R_0. Są one równe:

$$\varepsilon_0 = 87\ \frac{\text{gwiazd}}{\text{mln lat}}$$

$$R_0 = 2\ \text{pc} \approx 412530\ \text{au}$$

Jednocześnie wiemy, że zjawisko „przelotów” planet będziemy rozpatrywać w promieniu R równym promieniowi orbity Neptuna, czyli ok. 30 au. Wiemy też, że planety występują 10 razy częściej od gwiazd. Możemy zapisać równanie:

$$10 \times \frac{\varepsilon_0}{{R_0}^3} = \frac{\varepsilon}{R^3}$$

Gdzie ε jest oczywiście interesującą nas częstością. Wyznaczamy je łatwo z powyższego równania:

$$\varepsilon = 10 \times \varepsilon_0 \times \left(\frac{R}{R_0}\right)^3$$

Po podstawieniu wartości:

$$\varepsilon \approx 3{,}35 \times 10^{-10}$$

Możemy jeszcze obliczyć okres T, średnio co jaki w takiej lub bliższej odległości „przelatuje jedna planeta. Zrobimy to za pomocą proporcji:

$$3{,}35 \times 10^{-10}\ \text{planet} \ - \ 1\,000\,000\ \text{y}$$

$$1\ \text{planeta} \ - \ \text{T}$$

$$T = \frac{1\,000\,000}{3{,}35 \times 10^{-10}}\ [\text{y}] \approx 3 \times 10^{15}\ \text{y}$$

Jest to wartość ok. 200 tys. razy większa niż obecny wiek wszechświata. Wynik ten pokazuje, że do tak bliskich spotkań z planetami swobodnymi praktycznie nie dochodzi. Nie ma w tym nic dziwnego – w końcu odległość równa promieniowi orbity Neptuna jest w skali odległości w galaktyce wręcz śmiesznie mała.

Zadanie 7

a) W celu obliczenia położenia środka ciężkości gromad dokonano transformacji sferyczne współrzędne na współrzędne kartezjańskie danej wzorami

$x = r * cos(\varphi) * sin(\Theta)$

$y = r * sin(\varphi) * sin(\Theta)$

$z = r * cos(\Theta)$

r to odległość do gromady liczona od Ziemi

$\varphi = (RA - 12h) * \frac{\pi}{12h}$, gdzie RA to rektascensja gromady

$\Theta = \delta$, gdzie δ to deklinacja gromady.

Następnie wektor położenia środka masy obliczono zgodnie z zależnością

$(x_{CM}; y_{CM}; z_{CM}) = (\sum_{i=1}^{150} (x_i; y_i; z_i))/150$

Otrzymany wektor to (0,719 kpc ;6,39 kpc ;-3,63 kpc)

b) Aby ze współrzędnych kartezjańskich przejść do współrzędnych sferycznych użyto (następującej transformacji:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\varphi = arctg(y/x)$

$\theta = arcsin(z/r)$

Następnie rektascensję i deklinację obliczamy ze wzorów:

$RA = 12h + (12h * \varphi)/\pi$

$\delta = \Theta$

W wyniku wykonanych obliczeń otrzymano

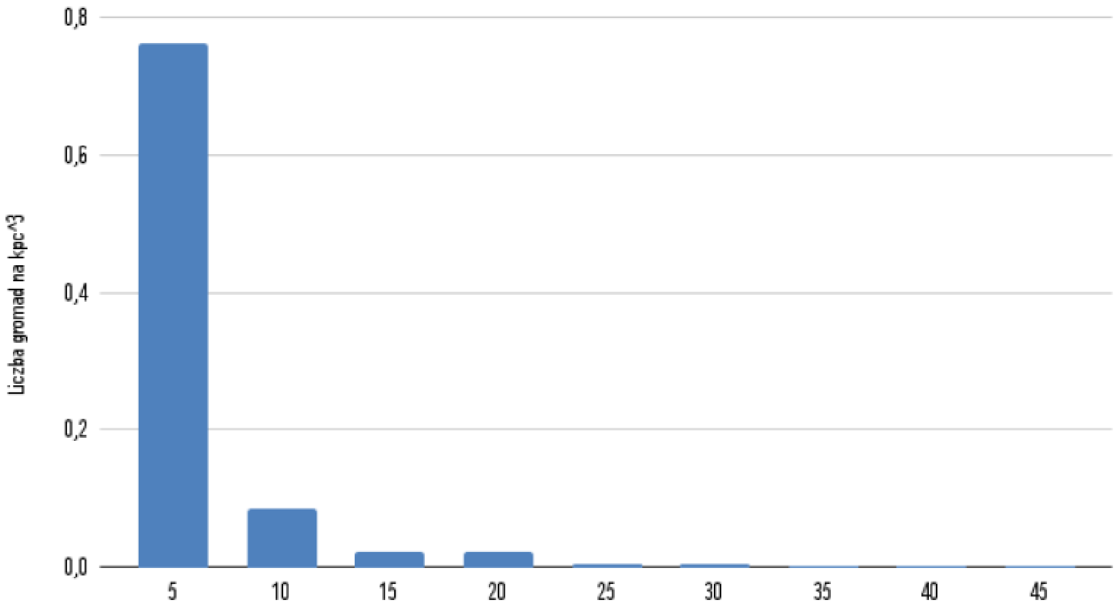
$(r_{CM}; RA_{CM}; \delta_{CM}) =$ (7,39 kpc; 17h 34m 21s; -29,4203°)

c) Dla każdej pary gromad policzono ich odległość od siebie zgodnie ze wzorem:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, gdzie $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ to współrzędne kartezjańskie gromad.

Następnie posortowano malejąco otrzymane odległości i wybrano trzy największe, które wynoszą 79,2 kpc, 72,5 kpc, 70,1 kpc. Średnicę Drogi Mlecznej można oszacować biorąc średnią arytmetyczną z powyższych trzech wyników. Wynosi ona 73,9 kpc.

d) Aby wykonać histogram policzono dla każdej gromady jej odległość od środka masy gromad zgodnie ze wzorem $\sqrt{(x - x_{CM})^2 + (y - y_{CM})^2 + (z - z_{CM})2}$, gdzie x,y,z to współrzędne kartezjańskie gromady. Ponumerujmy paski od środka od 1. Wtedy objętość n-tego paska wynosi $\frac{4}{3}\pi(5\ kpc)^3(n^3 - (n - 1)^3)$. Podzielono liczbę gromad znajdujących się w pasku przez objętość paska i wykonano histogram gęstości przedstawiony poniżej.


Liczba gromad na kpc^3
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
5
10
15
20
25
30
35
40
45